Chapitre 1 : Nombres, intervalles et valeur absolue.

Compétences attendues :	**Exercices** :
Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.	
Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.	
Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.	
Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.	

1 Les nombres réels

Quand on pense aux Mathématiques, la notion de nombre arrive naturellement. Mais les nombres ne sont pas tous pareils et revêtent selon leur nature des propriétés différentes. Dans ce premier chapitre on va s'attacher à présenter les différentes catégories de nombres.

Activité : Demander aux élèves de donner des nombres de leur choix, penser à les aiguiller pour obtenir au moins un nombre de chaque famille qu'on présentera après.

1.1 Les entiers naturels

Définition 1.1 (Entiers naturels)

Les **entiers positifs ou nuls** forment l'ensemble des **entiers naturels**.
Cet ensemble est noté $\mathbb{N}$.

Exemple 1.2 $2, 10^4, \frac{63}{9}$... sont des entiers naturels.

1.2 Les entiers relatifs

Définition 1.3 (Entiers relatifs)

Les **entiers positifs et négatifs** forment l'ensemble des **entiers relatifs**.
Cet ensemble est noté $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.4 $-2, -10^4, 5, -\frac{63}{9}$... sont des entiers relatifs.

Remarque 1.5 On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. On appelle ce symbole « inclusion ».

VRAI/FAUX : Déterminer les nombres qui sont des entiers naturels parmi la liste suivante :

- $42/6$
- $2,1415 \times 10^4$
- $1,6123 \times 10^2$
- $-(-63)/(-9)$
- 21000×10^{-5}
- $\sqrt{81}$

1.3 Les nombres décimaux

DÉFINITION 1.6 (NOMBRES DÉCIMAUX)

Les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a **un entier relatif et** n **un entier naturel non nul** forment l'ensemble des **nombres décimaux**. Cet ensemble est noté $\mathbb{D}$.

Exemple 1.7 $2, -\frac{63}{9}, 10^{-2}, 0.125, 2.5...$ sont des nombres décimaux.

Remarque 1.8 On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

PROPRIÉTÉ 1.9

Les nombres décimaux sont exactement les nombres que l'on peut écrire avec un nombre **fini** de chiffres après la virgule.

Démonstration. On considère le nombre décimal $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Diviser par 10^n revient à déplacer la virgule de l'entier a de n rang vers la gauche. Comme a possède un nombre fini de chiffres, $\frac{a}{10^n}$ également car on ajoute au maximum n zéros.

Réciproquement soit d un nombre avec k chiffres après la virgule. Alors $z := d \times 10^k \in \mathbb{Z}$ d'où finalement $d = \frac{z}{10^k}$ et donc d est décimal. □

On admettra cette prop mais on fera la remarque et on donnera les exemples pour s'en convaincre.

Exemple 1.10 $\frac{3}{10} =$ .... , $\frac{15}{100} =$ .... , $\frac{8}{1000} =$ .... , 0,125 = ...

PROPOSITION 1.11

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas *décimal*.

Démonstration

Supposons, par l'absurde, que $\frac{1}{3}$ soit décimal. Cela signifie, par définition, qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. Par produit en croix, on a alors $10^n = 3a$. Autrement dit 3 divise 10^n. Or un nombre est divisible par 3 uniquement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 et la somme des chiffres de $10^n = 1\underbrace{0\dots0}_{n \text{ zéros}}$ vaut 1 qui n'est pas divisible par 3. Ceci constitue donc une contradiction et donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. □

PROPRIÉTÉ 1.12

L'**ensemble des nombres décimaux** est stable par *addition*, par *multiplication*, mais pas par *passage à l'inverse*.

Cette prop sera plutôt vue en exercice
En effet, $\frac{3}{10}$ est décimal mais ce n'est plus le cas de $\frac{10}{3}$.

1.4 Les rationnels

DÉFINITION 1.13 (LES NOMBRES RATIONNELS)

Les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a, b **deux entiers relatifs et** b **non nul** forment l'ensemble des **nombres rationnels**. Cet ensemble est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple 1.14 $1/3, 2.5, 10^{-3}$... sont des nombres rationnels.

Remarque 1.15 On a $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

PROPRIÉTÉ 1.16

L'**ensemble des nombres rationnels** est stable par *addition*, par *multiplication* et tout élément non nul de $\mathbb{Q}$ admet un *inverse* (dans $\mathbb{Q}$).

PROPOSITION 1.17

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Démonstration. Ce résultat sera démontré comme application dans le chapitre "Racines, puissances". □

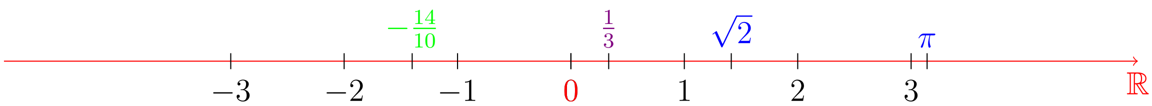
Exercices 34 à 38 p65 sur Indices

1.5 Les réels

DÉFINITION 1.18 (NOMBRES RÉELS)

L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé ensemble des **nombres réels**. On le note $\mathbb{R}$. Cette droite se nomme la *droite des réels*.

Exemple 1.19 (Droite des réels)



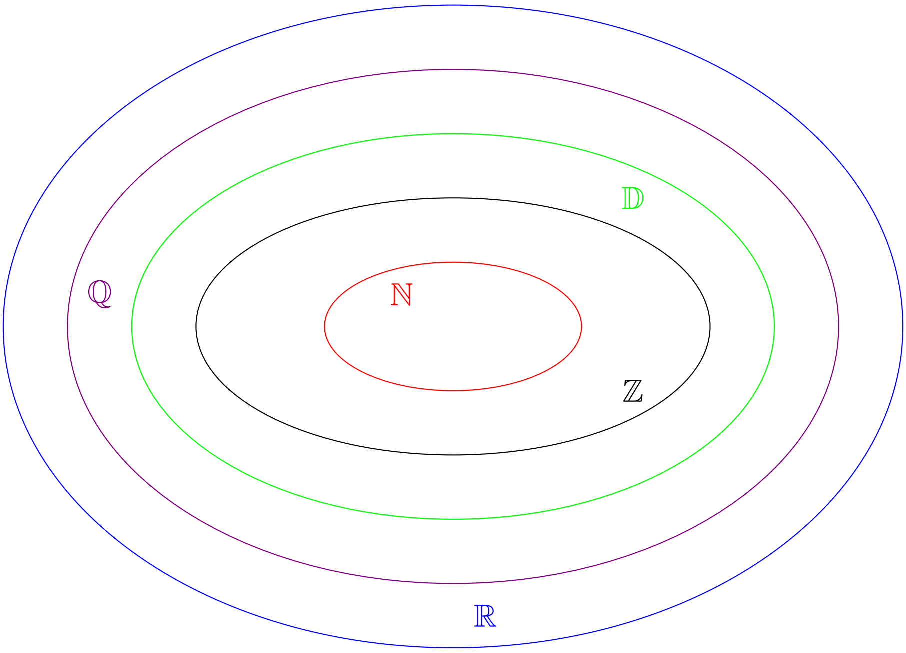
Remarque 1.20 On parle de nombres *irrationnels* pour désigner les nombres réels qui ne sont pas *rationnels* (*i.e.* qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$). On note cet ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, qui se lit "$\mathbb{R}$ privé de $\mathbb{Q}$".

Exemple 1.21 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et π sont irrationnels (admis).

D'après les définitions données, nous avons les inclusions suivantes :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}.$$

Exemple 1.22 Compléter au fil des définitions le schéma ci-dessous avec les exemples donnés dans le cours.

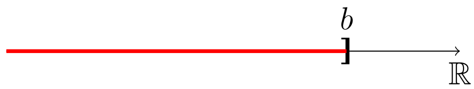
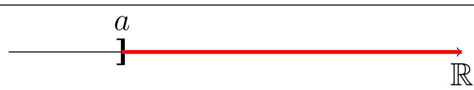


2 Intervalles de $\mathbb{R}$

DÉFINITION 2.1 (INTERVALLE DE $\mathbb{R}$)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. L'intervalle $[a, b]$ est l'*ensemble de nombres réels x compris entre* .... *et* .... : .... L'intervalle $[a, +\infty[$ est l'*ensemble des réels x supérieurs ou égaux à* .... : ....

Il existe 9 types d'intervalles de $\mathbb{R}$, les principaux cas possibles sont répertoriés dans le tableau ci-dessous.

Encadrement	Représentation sur la droite des réels	Intervalle
$a \leq x \leq b$		
		$x \in]a, b]$ *(intervalle ouvert en a et fermé en b)*
$x \leq b$		
		$x \in]a, +\infty]$

Attention !
Quand une des bornes de l'intervalle est infinie, le crochet associé est toujours ouvert. Ainsi on écrira toujours $]-\infty, b]$ et non $[-\infty, b]$.

Remarque 2.2 L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ correspond à l'intervalle ....

Définition 2.3 (Réunion, intersection d'intervalles et complémentaire)

Dire qu'un réel x appartient à une réunion d'intervalles (notation : $\cup$) signifie que que x appartient au moins l'un de ces intervalles.
Dire qu'un réel x appartient à une intersection d'intervalles (notation $\cap$) signifie que x appartient à tous ces intervalles.
Dire qu'un réel x appartient au complémentaire d'un intervalle (notation $\mathbb{R}\backslash$) signifie que x n'appartient pas à cet intervalle.

Exemple 2.4 $2 \in [-1, 1] \cup [1.5, 6]$.
$2 \notin [-1, 1] \cap [1.5, 6]$
Le complémentaire de $[-1, 1]$ est $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Remarque 2.5 L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aussi noté $\mathbb{R}^*$, n'est pas un intervalle. C'est la réunion des intervalles .... et .... , qui s'écrit $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, il y a un « trou »en 0.

Exercices 40 à 46 page 65 sur Indices (nombres réels).
Exercices 162,163,166,167 page 72 sur Indices (réunion d'intervalles et complémentaire).
Exercices 187 à 193 page 75 sur Indices (traduire les sols d'une inéquation sous forme d'un intervalle).

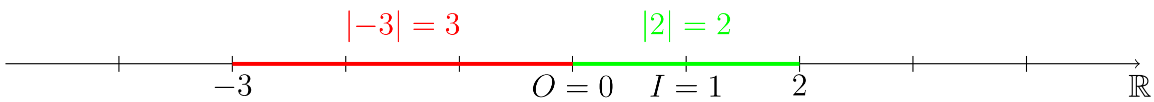
3 Valeur absolue

Définition 3.1 (Valeur absolue)

On munit naturellement la droite des réels du repère $(O = 0, I = 1)$. On considère un point M sur cette droite et soit x son abscisse. On appelle **valeur absolue du réel** x, notée .... , la distance entre 0 et x, c'est-à-dire la distance ....

Si $x \geq 0$, alors on a $|x| =$ .... , sinon $|x| =$ ....

Exemple 3.2

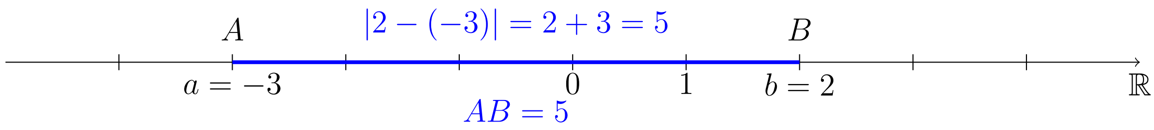


Définition 3.3 (Distance entre deux points)

Soient A et B deux points sur la droite des réels d'abscisses respectives a et b.

La quantité .... représente la distance entre les réels .... et .... , c'est-à-dire la distance ....

Exemple 3.4



Remarque 3.5 Soit a un réel et la droite des réels munie du repère $(O=0, I=1)$. On peut traduire $|a|$ comme la distance entre le point O et le point d'abscisse a.

Exemple 3.6 Résoudre par le calcul et graphiquement les équation suivantes :

- $|x| = 4$.
- $|x-2| = 5$.

Correction

— Graphiquement : Si $|x| = 4$, cela signifie que le point d'abscisse x est à une distance de 4 unités de l'origine. Donc $x = 4$ ou $x = -4$. Par le calcul : Résoudre $|x| = 4$ est équivalent à résoudre $x = 4$ et $x = -4$.

— Graphiquement : Si $|x-2| = 5$, cela signifie que le point d'abscisse x est à une distance de 5 unités par rapport au point d'abscisse 2. Donc $x = 2+5 = 7$ ou $x = 2-5 = -3$. Par le calcul : Résoudre $|x-2| = 5$ est équivalent à résoudre $x-2 = 5$ et $x-2 = -5$. Les solutions sont alors $x = 7$ et $x = -3$ respectivement.

Proposition 3.7

Soient a, r deux réels. L'intervalle $[a-r, a+r]$ correspond à l'ensemble des réels x tels que $|x-a| \leq r$, c'est-à-dire tous les réels qui sont à une distance au plus r de a.

Démonstration. Soit $x \in [a-r, a+r]$. Par définition on a $a-r \leq x \leq a+r$ ce qui se réécrit $-r \leq x-a \leq r$. Or $|x-a| = x-a$ ou $|x-a| = a-x$, dans chacun de ces deux cas on a bien $|x-a| \leq r$. □

Exercices 156, 142, 157, 159, 153 page 71 sur Indices

4 Application : encadrement d'un réel par des décimaux

Les calculatrices et les ordinateurs, pour stocker les valeurs des nombres avec lesquels on travaille, font l'approximation de traiter uniquement des nombres *décimaux*, car comme on l'a vu, ils s'écrivent avec un nombre fini de chiffres. Il est donc important, connaissant un réel x quelconque, de pouvoir en déterminer un encadrement par deux nombres décimaux et si possible avec la précision qu'on veut.

Définition 4.1 (Encadrement par des décimaux)

Donner un **encadrement décimal d'un réel** x c'est donner deux *décimaux* a et b tels que

....

De plus, si $|b-a| \leq$ .... , alors on parle d'encadrement de x à .... près.

La quantité $|b-a|$ est appelée **amplitude** de l'encadrement.

Exemple 4.2 Cherchons un encadrement de $\frac{1}{3}$ d'*amplitude* $10^{-\mathbf{2}}$.

Je commence par écrire $\frac{1}{3}$ avec **3**$(= 2 + 1)$ chiffres après la virgule. Ainsi $\frac{1}{3} \simeq 0,333$.
En posant $a = 0,33$ et $b = 0,34$ je trouve que $a = 0,33 \leq \frac{1}{3} \leq b = 0,34$ et $|b - a| = 0,34 - 0,33 = 0,01 = 10^{-2}$.
D'où $0,33 \leq \frac{1}{3} \leq 0,34$ est un encadrement de $\frac{1}{3}$ d'amplitude 10^{-2}.

Exemple 4.3 Donner un encadrement de

- π d'amplitude 10^{-3},
- $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-4}.

Correction

— On a $\pi \simeq 3,1415$. Alors $3,141 \leq \pi \leq 3,142$. Par construction, cet encadrement convient.

— On a $\sqrt{2} \simeq 1,41421$. Alors $1,4142 \leq \sqrt{2} \leq 1,4143$ convient.

Exercices 178,183,186 p65 sur Indices
Bonus : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

- $3,14159$
- 10^3
- $\frac{1}{8}$