Vecteurs

1 Translation

On considère un carré ABCD auquel on effectue une translation, c'est-à-dire qu'on va lui effectuer un « glissement »tout en lui conservant son orientation. Ceci est représenté dans la figure qui suit.

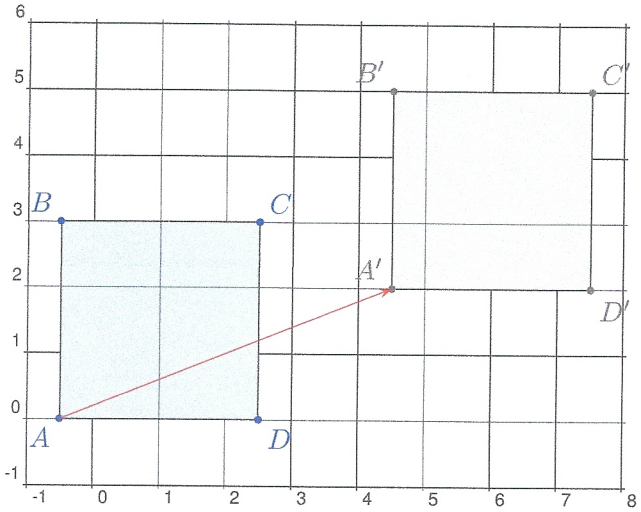


FIGURE 1 – Translation du carré ABCD

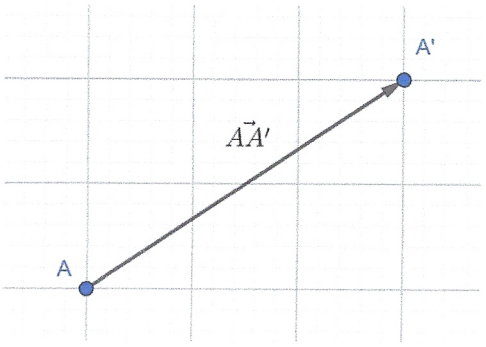
Dans cette figure 1, le point A devient A', B devient B', etc. Comment peut-on caractériser cette translation ?

Remarque 1.1 Il ne suffit pas de dire que l'on a effectué une translation, il faut préciser sa **direction**, son **sens** et sa **longueur**.
Une translation ne changeant pas les dimensions de la figure ni son orientation, il suffit de donner le déplacement d'un seul point de la figure. Par exemple, il suffit de dire que A va en A' pour pouvoir construire le carré A'B'C'D'.

DÉFINITION 1.2 (VECTEUR DE TRANSLATION)

Soient A et A' deux points du plan. La translation qui transforme A en A' est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Remarque 1.3 On aurait pu dire que B allait en en B' ou C en C'.
La figure a donc aussi subi une translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$ etc.



Définition 1.4 (Vecteur)

Soient A, B deux points distincts. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par

- sa direction qui correspond à la droite (AB).
- son sens, c'est le sens de A vers B.
- sa norme qui correspond à la longueur AB.

  On la note $\|\overrightarrow{AB}\|$ ("norme de $\overrightarrow{AB}$").

Remarque 1.5 (Vecteur nul) Soit A un point. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, qu'on note $\vec{0}$. Il est de norme nulle et n'a pas de direction.

2 Égalité de vecteurs

Définition 2.1 (Égalité de vecteurs)

Deux vecteurs sont égaux s'ils définissent la même translation.

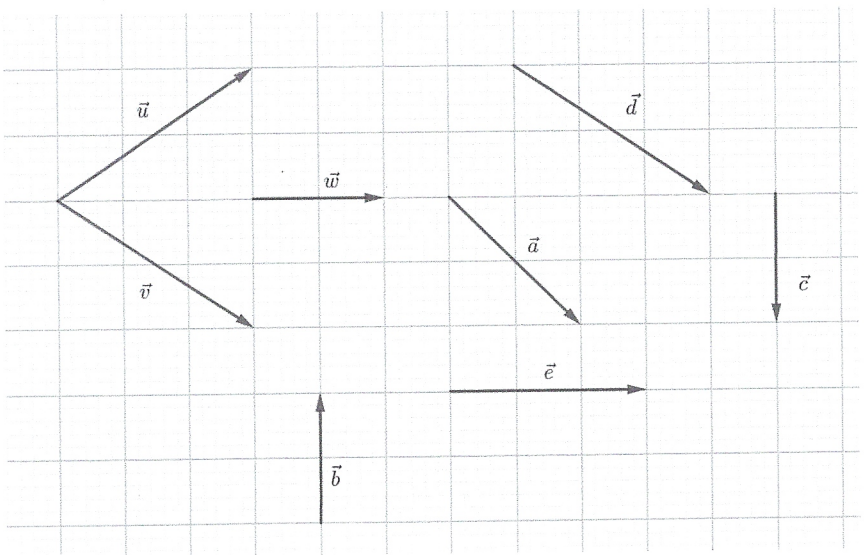
Définition 2.2 (Égalité de vecteurs)

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- Les demi droites [AB) et [CD) ont le même sens.
- Les longueurs AB et CD sont égales.

On écrit alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Dans ce qui suit, déterminer les vecteurs qui sont égaux, ceux qui ont même direction, ceux qui ont même sens et ceux qui ont même norme.



$\vec{v} = \vec{d}$

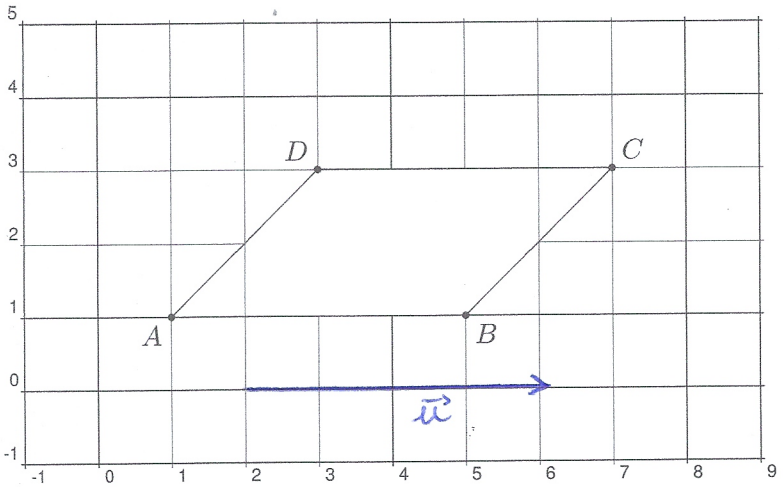
Réponse

même norme : $\vec{w}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ont même norme. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{d}$ ont même norme.
même direction : $\vec{v}$ et $\vec{d}$ ont même direction, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, $\vec{w}$ et $\vec{e}$.
même sens : $\vec{w}$ et $\vec{e}$, $\vec{v}$ et $\vec{d}$
vecteurs égaux : $\vec{v} = \vec{d}$.

Entraînement 1 : Activité 1 : égalité de vecteurs (première question de l'exercice 1 à l'oral).

Remarque 2.3 On peut ne pas préciser les extrémités d'un vecteur et le noter uniquement sous la forme $\vec{u}$.

Exemple 2.4 Considérons maintenant le parallélogramme $ABCD$ suivant.



À partir des points présents sur cette figure, quels sont les vecteurs qu'on peut former et qui sont égaux ?

$\vec{AD} = \vec{BC}$; $\vec{AB} = \vec{DC}$; $\vec{CD} = \vec{BA}$; $\vec{DA} = \vec{CB}$.

Dessiner un vecteur $\vec{u}$ égal à $\overrightarrow{AB}$.

Remarque 2.5 On dira ici que $\vec{u}$ est un représentant de $\vec{AB}$. Un vecteur possède ainsi une infinités de représentants, un pour chaque point d'origine.

PROPOSITION 2.6

Soient quatre points A, B, C et D.

Si $ABCD$ est un *parallélogramme* (éventuellement plat) alors $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Si $\vec{AB} = \vec{DC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

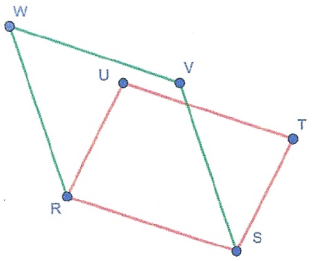
Vocabulaire

Plus tard, on dira que $ABCD$ est un parallélogramme **si, et seulement si** $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Ce qui s'écrit $ABCD$ est un parallélogramme $\iff$ (« équivalent à ») $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Exemple 2.7

Soient $RSTU$ et $RSVW$ deux parallélogrammes.



1. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{UT}$ et $\overrightarrow{WV}$, justifier.

2. Conclure sur la nature du quadrilatère $UTVW$.

Réponse

1) RSTU est un parallélogramme donc $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$.
RSVW ——— $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{WV}$.

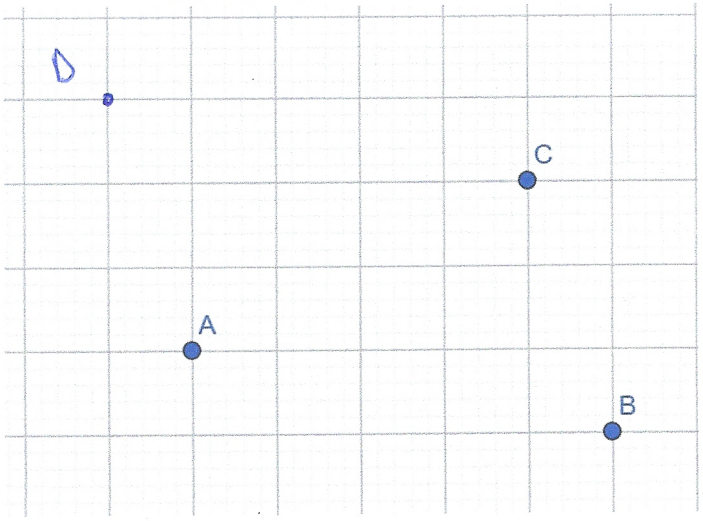
D'où $\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{WV}$.

2) $\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{WV}$ donc UTVW est un parallélogramme.

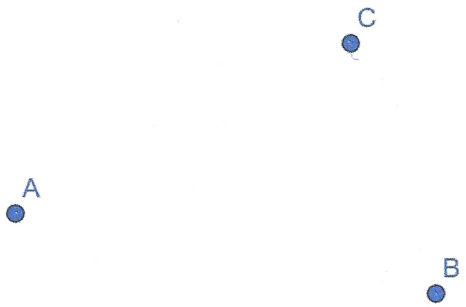
Entraînement 2 : Exercice 55 du livre.

Exemple 2.8 Dans chacun des deux cas, construisez le point D de sorte que $ABCD$ soit un parallélogramme.

En comptant les carreaux



Avec le compas

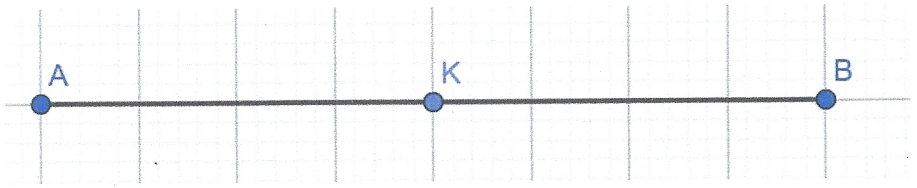


Quelle égalité vectorielle vérifie $\overrightarrow{CD}$?

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

Remarque 2.9 On dit ici qu'on a construit le représentant du vecteur $\overrightarrow{BA}$ d'**origine** C.

On considère maintenant un segment $[AB]$ de milieu K.



En terme de vecteurs, quelles égalités avons-nous ici ?

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$; $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KA}$.

Propriété 2.10 (Milieu d'un segment)

Soit un segment $[AB]$ et un point K.

Si K est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$.

Si $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$, alors K est le milieu de $[AB]$.

Vocabulaire

On écrira dans ce cas : K est le milieu de $[AB] \iff \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$.

Exemple 2.11 Soient 3 points M, N, O distincts.

1. On a $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$, que peut-on déduire ? O est le milieu de $[MN]$.
2. On a N milieu de $[OM]$, que peut-on en déduire ? $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$
3. On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NM}$, M est-il le milieu de $[NO]$? M milieu de $[NO]$ signifie $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MO}$. Or $\overrightarrow{MO} \neq \overrightarrow{OM}$ car les pts sont distincts. Donc NON.

Entraînement 3 : Exercices 56, 57 et 58 du livre et pour les plus rapides, Exercice 138.

8/10

3 Somme de vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On s'intéresse à la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

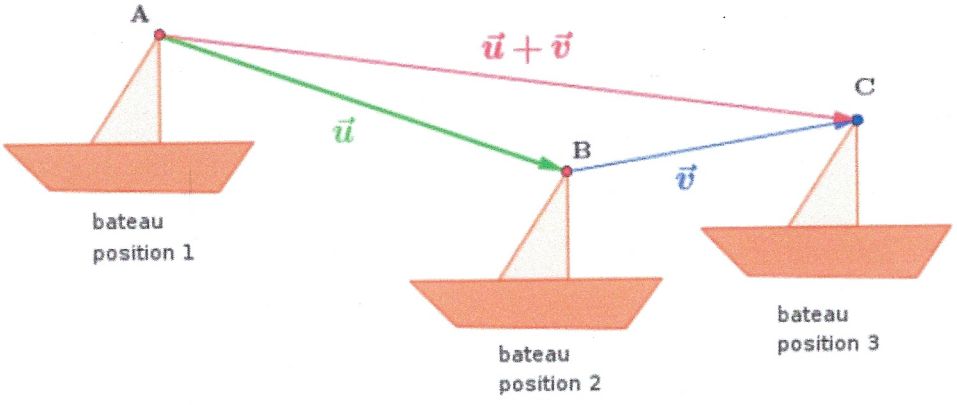


FIGURE 2 – Translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

Le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
Le point C est l'image du point B par la translation de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
On applique **successivement** les deux translations.
Cela revient à n'en appliquer qu'une seule (on va directement de A en C, sans passer par B). Cette translation qui permet de passer de A en C est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

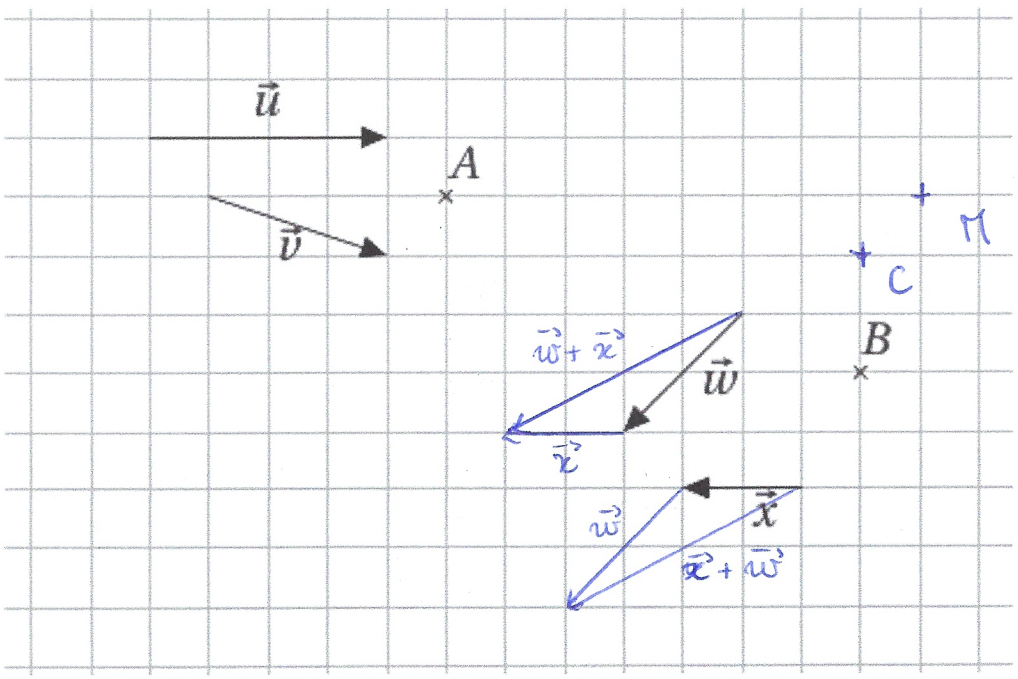
3.1 Définition

Définition 3.1 (Somme de vecteurs)

Soient trois points A, B et C. Si on applique la translation de vecteur ..... suivie de la translation de vecteur ....., on obtient la translation de vecteur .....
On dit que $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs .....

Exemple 3.2 (Somme de vecteurs)

1. Construire le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Construire un représentant de $\vec{w} + \vec{x}$.
3. Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{u}$.



3.2 Propriétés

Proposition 3.3 (Relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C, on a

.....

Exemple 3.4 Déterminer $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}$ puis $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DA}$.

Propriété 3.5

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, 3 vecteurs. On a $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ et $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

Exemple 3.6 Soient 3 points M, N et O. Déterminer $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO}$ puis $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{NO}$.

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NM}$.

Entraînement 4 : Exercice 62 du livre + Activité 2 : somme de vecteurs.

Entraînement 5 : Exercices 67 et 69 du livre.

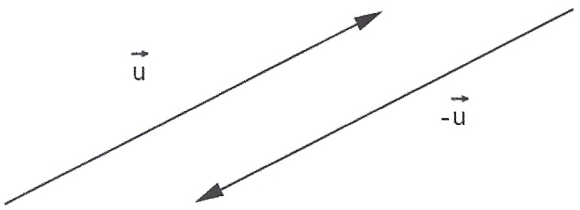
3.3 Opposé d'un vecteur

Définition 3.7 (Opposé d'un vecteur)

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur de même direction, de même norme mais de sens opposé.

On le note $-\vec{u}$.

Il vérifie $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.



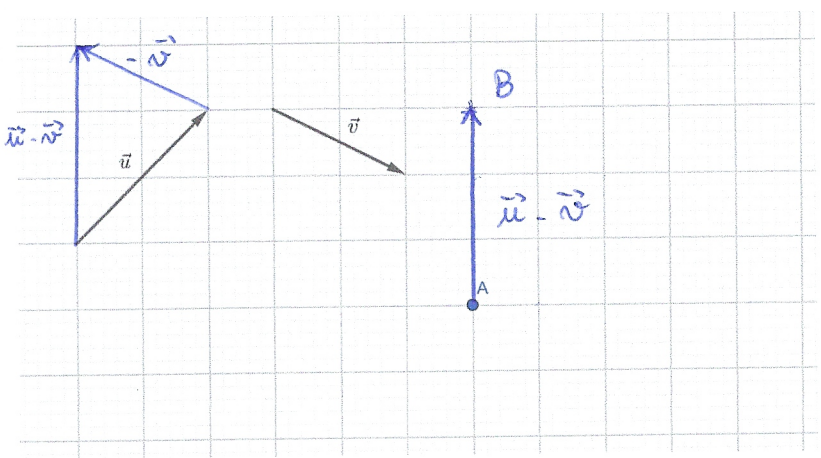
Proposition 3.8

Soient A, B deux points. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

En effet, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, d'après la **relation de Chasles**.

Entraînement 6 : Exercices 63 et 68 du livre.

Exemple 3.9

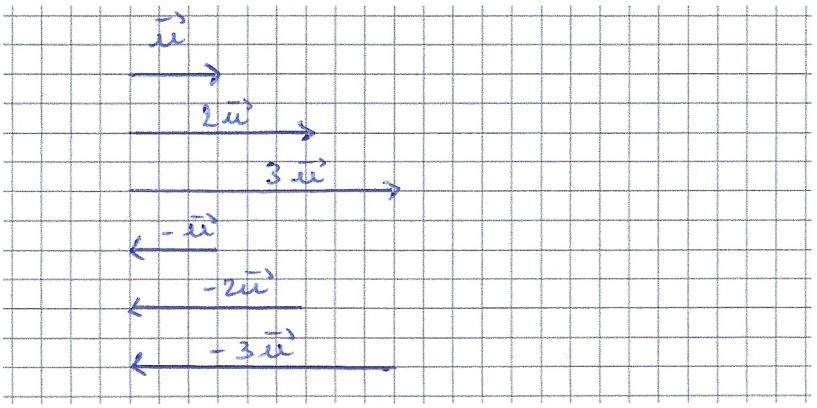


1. Construire un représentant du vecteur $\vec{u} - \vec{v}$.
2. Construire le point B image de A par la translation de vecteur $\vec{u} - \vec{v}$.

4 Multiplication d'un vecteur par un réel

Exemple 4.1 Dans l'exemple 3.2 nous avons représenté le vecteur $\vec{u} + \vec{u}$. Dans la suite nous écrirons alors que $\vec{u} + \vec{u} =: 2\vec{u}$.

schéma :



Définition 4.2 (Vecteur $k\vec{u}$)

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. $k\vec{u}$ est le vecteur défini par :

- sa direction : $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction ;
- son sens : si $k > 0$, $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens.
  Si $k < 0$, $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens opposés ;
- sa norme : $\|k\vec{u}\| = |k| \, \|\vec{u}\|$.

Remarque 4.3 Si $\vec{u} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$. Si $k = 0$, $0\vec{u} = \vec{0}$.

Entraînement 7 : Activité 3 : Multiplication d'un vecteur par un réel + Exercices 78 et 79 du livre.

Entraînement 8 : (Bonus) Activité 4 : Construire à partir d'égalités vectorielles + Exercice 138.

5 Repère et coordonnées d'un point

5.1 Repère et base de vecteurs

Définition 5.1 (Base de vecteurs)

Un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs forme une **base** si ces deux vecteurs sont non nuls et de directions différentes.

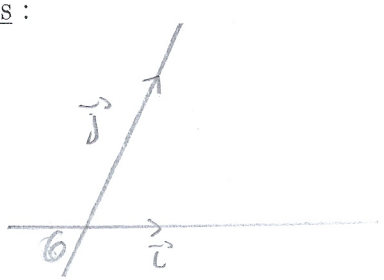
Définition 5.2 (Repère)

Se donner un **repère** c'est se donner un triplet $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où O est un point du plan et $(\vec{i}; \vec{j})$ une base.

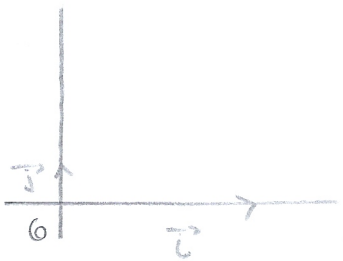
De plus on dit que ce repère est

- **Orthogonal** si les droites engendrées par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires.
- **Orthonormé** si de plus, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont la même norme.

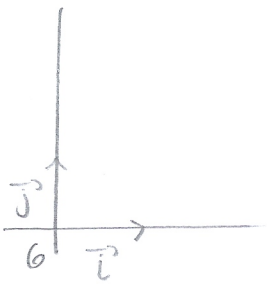
Schémas :



repère quelconque



repère orthogonal



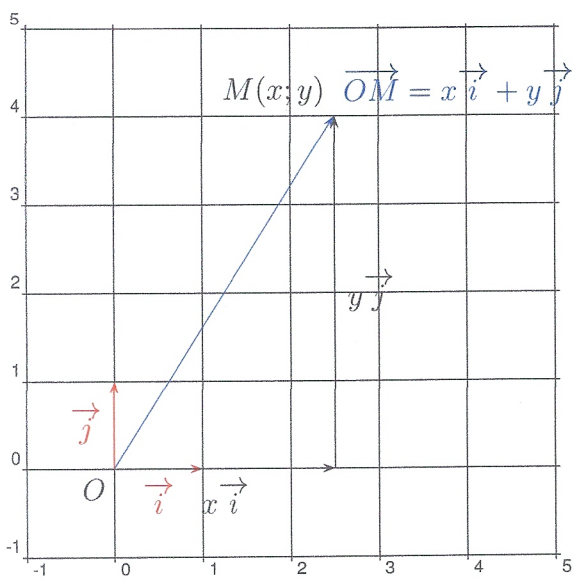
repère orthonormée

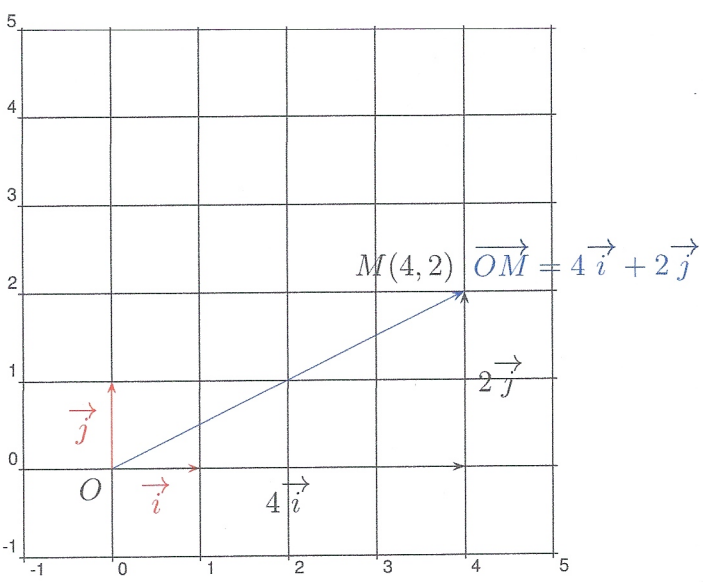
5.2 Coordonnées d'un point

Définition 5.3 (Repérage dans le plan)

Une fois munis d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, nous pouvons attribuer à tout point M du plan des coordonnées $M(x; y)$ définies comme suit

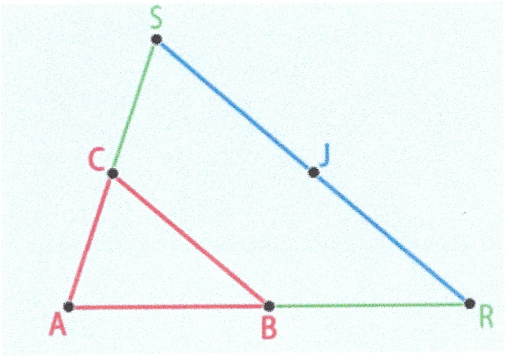
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$





Exemple 5.4 On considère un triangle ABC. Soient R et S les points tels que

$$\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AB} \quad et \quad \overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{AC}.$$



On choisit le repère $(\boldsymbol{A}; \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}; \overrightarrow{\boldsymbol{AC}})$. On rappelle alors que les coordonnées d'un point M dans ce repère sont les réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Déterminer les coordonnées des points A, B, C, R et S.

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$:

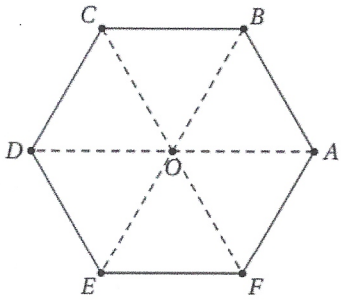
$A : (0;0)$ $B : (1;0)$ $C : (0;1)$

$R : (2;0)$ $S : (0;2)$

Car $\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS} = 0\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

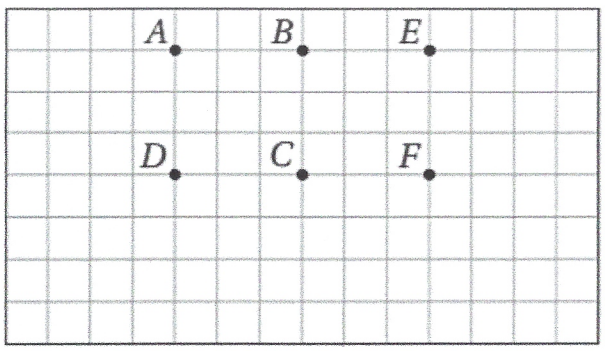
Activité 1 : Égalité de vecteurs

Exercice 1 : On considère la figure suivante.



1. Déterminer le plus possible de vecteurs égaux formés à partir des points de la figure.
2. Dans chaque cas, déterminer les égalités qui sont vraies.
   a) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$; $DC = OB$; $(DC) = (OB)$.
   b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FE}$; $AF = FE$; $(AF) = (FE)$.
   c) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$; $OA = OD$; $(OA) = (OD)$.
   d) $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EO}$; $EB = EO$; $(EB) = (EO)$.
3. Quelle est l'image du triangle DOC par la translation de vecteur $\overrightarrow{OF}$?
4. Quelle est l'image du quadrilatère $DOBC$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$?
5. Quelle est l'image du quadrilatère $CDEO$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DO}$?
6. Quelle est l'image du triangle AOF par la translation de vecteur $\overrightarrow{ED}$?

Exercice 2 : On considère la figure ci-dessous.



1. Déterminer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ puis un vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$.
2. Construire les points M, N, P et Q tels que :
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BD} \quad \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AF} \quad \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{ED} \quad \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{EC}.$$
3. Quelle est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$? De vecteur $\overrightarrow{BF}$?
4. Quelle est l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$? De vecteur $\overrightarrow{CD}$?

Correction

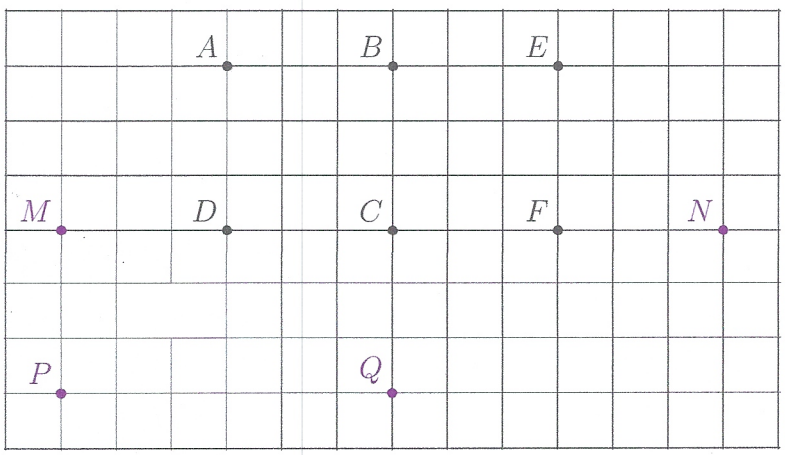
Exercice 1 :

1.
   - $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FA}$
   - $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OA}$
   - $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DE}$
   - $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$
   - $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$
   - $\overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$

2. a) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$; $DC = OB$; $(DC) = (OB)$.
   b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FE}$; $AF = FE$; $(AF) = (FE)$.
   c) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$; $OA = OD$; $(OA) = (OD)$.
   d) $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EO}$; $EB = EO$; $(EB) = (EO)$.
3. EFO.
4. $EFAO$.
5. $BOFA$.
6. BCO.

Exercice 2 :

1.
   - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$.
   - $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$.
2. Les points M, N, P et Q se placent comme suit :

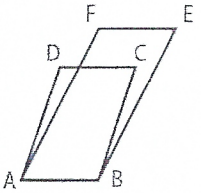


3. L'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ est B.
   L'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BF}$ est C.
   L'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$ est D.
   L'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ est C.

CHAPITRE 2 : LES VECTEURS

55 Sur la figure ci-contre, ABCD et ABEF sont deux parallélogrammes.

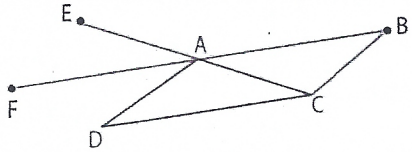
1. Donner, en justifiant, deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.
2. Montrer que le quadrilatère FECD est un parallélogramme.



56 On considère un parallélogramme EFGH.

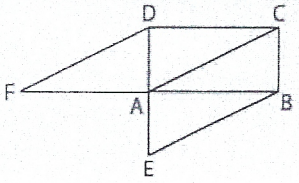
1. Faire une figure.
2. Construire le point J tel que EFHJ est un parallélogramme.
3. Montrer que H est le milieu du segment [GJ].

57 On considère un triangle ADC isocèle en A.
Soit B le point tel que ADCB est un parallélogramme, E et F les symétriques respectifs de C et B par rapport à A.

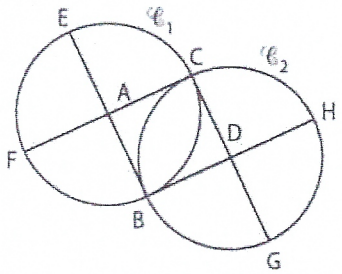


1. Justifier que le quadrilatère EFCB est un parallélogramme.
2. a. Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$.
   b. Montrer que le quadrilatère AEFD est un losange.

58 **Une question ouverte**
Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle, et AEBC et ACDF sont des parallélogrammes. Montrer que le quadrilatère EBDF est un parallélogramme de centre A.



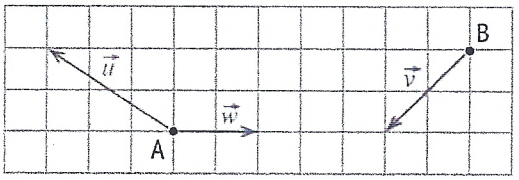
138 **Des cercles sécants**
On considère deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de même rayon et de centres respectifs A et D. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont sécants en B et C.
[BE] et [CF] sont des diamètres de $\mathscr{C}_1$; [BH] et [CG] sont des diamètres de $\mathscr{C}_2$.



Montrer que le point C est le milieu du segment [EH].

PISTE : Montrer que les quadrilatères ADCE et ADHC sont des parallélogrammes.

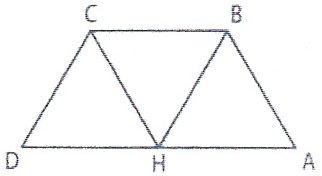
62 Reproduire la figure ci-dessous, et construire les points E, F et G définis par :
$\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{w}$, $\overrightarrow{BF} = \vec{v} + \vec{u}$ et $\overrightarrow{BG} = \vec{u} + \vec{w}$.



67 Soit A, B et C trois points.
Recopier et compléter, en utilisant la relation de Chasles, chacune des égalités vectorielles suivantes :

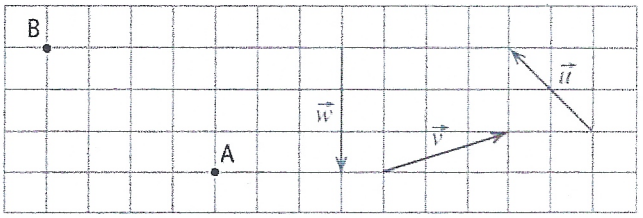
a. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{...C} = \overrightarrow{BC}$ b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B...} = \overrightarrow{AC}$
c. $\overrightarrow{C...} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$ d. $\overrightarrow{...C} + \overrightarrow{...A} = \overrightarrow{BA}$

69 Sur la figure ci-contre, HAB, HBC et HCD sont des triangles équilatéraux.



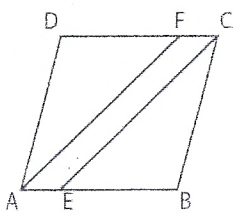
1. Quelle est la nature des quadrilatères BCDH et ABCH ?
2. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{HB}$.
3. Remplacer chacune des sommes vectorielles suivantes par un vecteur unique : $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HA}$; $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AB}$.

63 1. Reproduire la figure ci-dessous et construire le représentant d'origine A des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.



2. Construire les points E et F définis par :
$\overrightarrow{BE} = \vec{u} + \vec{w}$ et $\overrightarrow{BF} = \vec{v} + \vec{w}$.

68 Soit A, B et C trois points.
Justifier les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$ et $-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

78 **Vrai ou Faux ?**
A, B et C sont trois points.
Indiquer si les affirmations proposées sont vraies ou fausses, puis justifier.
a. Si I est le milieu du segment [AB], alors $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
b. Si $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$.

79 Sur la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme, et E et F sont les points définis par :
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.
Montrer que le quadrilatère AECF est un parallélogramme.